Dodatci:

1. Funkcija slučajne varijable

S funkcijom slučajnih varijabla već smo se susretali pri razmatranju slučajne varijable $Y=aX+b$, posebice kod normalnih razdioba. Općenito, ako je X slučajna varijabla i h realna funkcija realne varijable, onda definiramo slučajnu varijablu $Y:=h(X)$ zahtjevom:

Ako X postigne vrijednost *x*, onda h(X) postigne vrijednost h(x).

Treba razlikovati slučaj diskretne od kontinuirane varijable, takodjer slučaj injektivne funkcije h od one ne injektivne.

Razdioba diskretne slučajne varijable Y:=h(X).
Neka je razdioba diskretne slučajne varijable zadana tablicom.

x_1	x_2	x_3	x_4	....
p_1	p_2	p_3	p_4	....

Tada se razdioba slučajne varijable $Y:=h(X)$ može zadati ovako

$h(x_1)$	$h(x_2)$	$h(x_3)$	$h(x_4)$	....
p_1	p_2	p_3	p_4	....

Tu treba biti oprezan.
Naime, ako je h injektivna, tj. različitim argumentima pridružuje različite vrijednosti, onda su svi $h(x_i)$ međusobno različiti, i ta tablica zaista jest tablica razdiobe slučajne varijable h(X). To je, posebice, ispunjeno ako je h linearna funkcija, tj. $h(x):=ax+b$, za $a\neq 0$.
Ako h nije injektivna , onda se **može dogoditi** (ali ne mora) da neki od brojeva u prvom redku budu jednaki. Tada sve takve smatramo jednim, a pripadna je vjerojatnost zbroj pojedinih vjerojatnosti. To pokazujemo primjerom gdje je h kvadratna funkcija, što se često javlja i u vjerojatnosti i u statistici.

Primjer 1. Neka X registrira razliku rezultata kod dvaju uzastopnih bacanja kocke i neka je $h(x):=x^2$. Opišimo slučajnu varijablu $Y=h(X)$, tj. $Y=X^2$.

Već smo se upoznali s razdiobom od X.

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Da odredimo razdiobu od X^2, najprije prvi red kvadriramo, a drugi ostavimo na miru:

25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Uočavamo da su neki brojevi u prvom redku jednaki; njih pišemo kao jedan, pripadne vjerojatnosti zbrojimo. Na primjer, $p(X^2=25)=p(X=-5 \text{ ili } X=5)=1/36+1/36=2/36$. Dakle,

0	1	4	9	16	25
6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

je razdioba slučajne varijable X^2. Uvjerite se da je zbroj vjerojatnosti 1.

Sjetimo se da je $E(aX+b)=aE(X)+b$, i $V(aX+b)=a^2V(X)$. Tako nešto slično ne vrijedi za druge funkcije koje nisu linearne. Dakle, općenito je $E(h(X)) \neq h(E(X))$. Na primjer, očito je da za X iz Primjera 1. vrijedi
$E(X) = 0$. Takodjer, lako je izračunati da je $E(X^2)=210/36$, dok je $E(X)^2=0$.

Razdioba kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).

Da bismo opisali razdiobu slučajne farijable h(X), treba joj opisati funkciju gustoće i funkciju distribucije. Radi toga neka je:
f - funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X.
F - funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable X.
g - funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).
G - funkcija distribucije kontinuirane slučajne varijable Y:=h(X).
Treba opisati *g* pomoću *f* i *h*, odnosno *G* pomoću *F* i *h*.
Pokazuje se da je, općenito, bolje poći od opisa funkcije distribucije *G* pomoću *F* i *h*.
Problem ćemo riješiti za **rastuće** funkcije *h*, te za kvadratnu funkciju *h* (to su u prasksi najčešći slučajevi).

1. Slučaj rastuće funkcije *h*.

Vrijedi $G(x)=F(h^{-1}(x))$, i $g(x)=f(h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)$, gdje je h^{-1} inverzna funkcija od *h*.
Dokaz:
$G(x):=p(Y<x)=p(h(X)<x)=p(X<h^{-1}(x)):=F(h^{-1}(x))$.
Sad, koristeći se formulom za derivaciju složene funkcije, dobijemo da je (za gotovo sve *x*):
$g(x):=G'(x)=F'((h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)= f(h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)$.

Kao primjer, izvest ćemo funkciju gustoće log-normalne razdiobe koja je naročito važna u opisu bioloških fenomena.

Primjer 2. (log-normalna razdioba $Y:=e^X$, gdje je X normalna razdioba).
Neka je $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ i $h(x)=e^x$; tada je $h^{-1}(x)=\ln(x)$, pa za funkciju gustoće *g* slučajne varijable $Y:=e^X$ vrijedi:

$g(x)=\dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, za x>0 (sl.1.).

2. Slučaj funkcije $h(x):=x^2$.

Tu je, za x>0:
$G(x):=p(Y<x)=p(h(X)<x)=p(X^2<x)=p(-\sqrt{x}<X<\sqrt{x})=F(\sqrt{x})-F(-\sqrt{x})$
Zato je
$g(x):=G'(x)=(1/2\sqrt{x})f(\sqrt{x})+(1(2\sqrt{x})f(-\sqrt{x})$

To ćemo ilustrirati na primjeru kvadrata jedinične normalne razdiobe, koja je vrlo važna u statistici.

Primjer 3. Neka je $X\sim N(0,1)$ jedinična normalna razdioba i neka je $h(x):=x^2$.

Odredimo distribuciju slučajne varijable Y:=h(X), tj. Y:=X^2.

Iz prethodne formule dobijemo:

g(x)=(1/2$\sqrt{x}$)f($\sqrt{x}$)+(1/2$\sqrt{x}$)f(-$\sqrt{x}$)=(1/$\sqrt{x}$)f($\sqrt{x}$)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}$, za x>0 (sl.2.)

Primjer 4. (formula za E(X^2) –očekivanje kvadrata slučajne varijable).
Ako zadržimo prijašnje oznake (tj. da je f funkcija gustoće od X, a g funkcija gustoće od X^2) imamo:

E(X^2) := $\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_{0}^{\infty} xg(x)dx$, jer je g(x)=0, za x<0.

Odavde se dobije

E(X^2) = $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

Sjetimo se da za kontinuiranu slučajnu varijablu X vrijedi.

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - E^2(X)$.

Kombinirajući s predhodnom formulom, dobijemo važnu formulu za varijancu:
V(X)= E(X^2) – E^2(X),
koju često pišemo i koristimo u obliku
E(X^2) = E^2(X) + V(X).
Taj je oblik važan i zbog toga što je u njemu očekivanje kvadrata slučajne varijable izraženo pomoću očekivanja i varijance od X.

2. Linearna kombinacija slučajnih varijabla

U teoriji i u praksi često je potrebno razmatrati linearnu kombinaciju slučajnih varijabla, napose normalnih. Već smo se susretali sa zbrojem i razlikom dviju varijabla, a i sa nekim složenijim primjerima. Općenito:
Ako su $X_1,X_2,\ldots,X_n$ slučajne varijable i $a_1,a_2,\ldots,a_n$ realni brojevi onda se definira **linearna kombinacija** – nova slučajna varijabla:

$X=a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$

Smisao je: ako X_1 poprimi vrijednost r_1, X_2 vrijednost r_2,…, X_n rezultat r_n, onda $a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n$ poprimi rezultat $a_1r_1+a_2r_2+\ldots+a_nr_n$.

Na primjer, prema uzoru na aritmetičku sredinu $\bar{x}$ podataka x_1, x_2, …, x_n, definira se aritmetička sredina $\bar{X}$ slučajnih varijabla X_1, X_2, …, X_n; to je varijabla

$$\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots + \frac{1}{n}X_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

i vrlo je važna u teoriji vjerojatnosti i u matematičkoj statistici.

Nije teško vidjeti da vrijedi (bez obzira jesu li varijable diskretne ili kontinuirane),

$E(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n)= a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\ldots+a_nE(X_n)$

To je naročito jasno ako se pozovemo na fizikalnu interpretaciju očekivanja kao težišta (i za diskretne slučajne varijable).

Općenito, ne postoji jednostavna formula za varijancu linearne kombinacije slučajnih varijabla. Međutim, **ako su** slučajne varijable X_i **međusobno nezavisne**, onda vrijedi:

$$V(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots a_nX_n) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + \ldots a_n^2V(X_n)$$

Nezavisnost dviju slučajnih varijabla grubo bi se (i matematički donekle neprecizno) mogla definirati ovako:

Diskretne slučajne varijable X,Y su nezavisne ako vjerojatnost da Y poprimi neku vrijednost, ne ovisi o tome koju je vrijednost poprimila X (i obratno) .

Za kontinuirane slučajne varijable sve su pojedinačne vjerojatnosti jednake nuli, pa se nezavisnost može ovako definirati:

Kontinuirane slučajne varijable X,Y su nezavisne ako vjerojatnost da Y poprimi vrijednost u nekom intervalu, ne ovisi o tome u kojem je intervalu vrijednost poprimila X (i obratno) .

Nezavisnost više slučajnih varijabla definirala bi se analogno.

Sada vidimo da vrijedi.
Ako su $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1,2,\ldots,n$ nezavisne normalne slučajne varijable, onda je i
$X := a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots a_nX_n$
normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ i $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$

Sljedeća dva primjera imaju veliku primjenu u statistici.

Primjer 5. Odredimo očekivanje i varijancu aritmetičke sredine n nezavisnih normalnih slučajnih varijabla jedanako distribuiranih s parametrima μ i σ^2.

$E(\overline{X}) = \mu$, $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, drugim riječima $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{n}})$.

Napomena: Da slučajne varijable nisu bile normalno distribuirane, ali da su bile nezavisne, s medjusobno jednakim očekivanjima i medjusobno jednakim varijancama, onda bi $\overline{X}$ imao to isto očekivanje, a varijancu n puta manju. Ako bi, dodatno, n bio dovoljno velik (bar 30), onda bi $\overline{X}$ bio **približno** normalno distribuiran (to je pojednostavljena formulacija **centralnog graničnog teorema**).

Prema uzoru na varijancu $(s')^2$ i korigiranu varijancu s^2 (iz deskriptivne statistike) definiraju se $(S')^2$ i S^2 kao:

$(S')^2 := \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+...+(X_n-\overline{X})^2}{n}$

$S^2 := \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+...+(X_n-\overline{X})^2}{n-1}$.

Uočite da vrijedi

$S^2 = \dfrac{(X_1^2+X_2^2+...+X_n^2)-n\overline{X}^2}{n-1}$

Primjer 6. Pokažimo da je $E(S^2) = \sigma^2$, ako su X_i medjusobno nezavisne slučajne varijable svaka s očekivanjem μ i varijancom σ^2 (ne moraju biti normalno distribuirane).

Koristeći se svojstvima očekivanja i formulom iz Primjera 4, dobijemo:

$E(S^2)= \dfrac{(X_1^2+X_2^2+...+X_n^2)-n\overline{X}^2}{n-1} = \dfrac{E(X_1^2)+E(X_2^2)+...+E(X_n^2)-nE(\overline{X}^2)}{n-1}$

$= \dfrac{E^2(X_1)+V(X_1)+E^2(X_2)+V(X_2)+...+E^2(X_n)+V(X_n)-n(E^2(\overline{X})+V(\overline{X}))}{n-1}$

$= \dfrac{n\mu^2+n\sigma^2-n\mu^2-n\dfrac{\sigma^2}{n}}{n-1} = \dfrac{(n-1)\sigma^2}{n-1} = \sigma^2$

U sljedećem primjeru pokazujemo da se zavisne slučajne varijable vrlo često pojavljuju, te ilustriramo ponašanje varijance.

Primjer 7. Bacamo kocku dva puta. Slučajna varijabla X registrira veći od rezultata, a slučajna varijabla Y manji.

(i) Pokažimo da su te dvije slučajne varijable zavisne.

(ii) Odredimo varijance od X, Y i X+Y.

(i) Vidimo da vrijedi:
p(X=1)=1/(36) jer se to moze dogoditi ako i samo ako oba puta bude 1.
S druge strane
P(X=1|Y=2)=0
jer, ako je 2 minimalni rezultat, onda X ne može poprimiti rezultat 1.

(iii) Razdiobe ovih dviju varijabla već smo razmatrali. Vidjeli smo da je

X:	1	2	3	4	5	6
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Y:	1	2	3	4	5	6
	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Zato je (na tri decimalna mjesta)
E(X)=161/36 = 4.472 ; V(X) = 1.424^2 E(Y)=91/36 = 2.528; V(Y) = 1.424^2

Vidimo dalje da je X+Y slučajna varijabla koja zbraja rezultate, dakle
X+Y: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1/36   2/36   3/36   4/36   5/36   6/36   5/36   4/36   3/36   2/36   1/36

jer je:
p(X+Y=2)=p(X=Y=1)=p(na obje kocke 1)=1/36
p(X+Y=3)=p(X=2 i Y=1)=p(na jednoj kocki 1, na drugoj 2)=2/36
p(X+Y=4)=p[X=Y=2 ili (X=3 i Y=1)]=1/36+2/36=3/36 itd.
Zato je:
E(X+Y)=252/36=161/36+91/36=E(X)+E(Y),
Međutim,
V(X+Y) = 2.449^2, dok je V(X)+V(Y) = $2\cdot 1.424^2 = 2.014^2$.

Hi kvadrat razdioba $\chi^2(n)$.
Ta razdioba ima važnu primjenu u statistici (pri testiranju) . Dobije se ovako.
Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ međusobno nezavisne jedinične normalne razdiobe.
Tada je **hi kvadrat razdioba** s n **stupnjeva slobode** (n=1,2,...) definirana kao
$\chi^2(n) := X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$
Znači, jedinične se normalne varijable najprije kvadriraju, potom zbroje (sl.3.).

Studentova t-razdioba t(n) s *n* stupnjeva slobode

Ta se razdioba prirodno pojavila u statistici. Studentove se razdiobe razlikuju prema stupnju slobode n=1,2,3,.... Kako se *n* povećava tako se t-razdioba približava jediničnoj normalnoj i za n=30 praktično joj je jednaka (sl.4).

Definicija t-razdiobe:

$$t(n)=\frac{X}{\sqrt{Y}}$$

gdje su X~N(0,1) i Y~$\dfrac{\chi^2(\mathrm{n})}{\mathrm{n}}$ nezavisne razdiobe. Dakle,

$$Y\sim\frac{X_1^2+X_2^2+\ldots X_n^2}{n}$$

gdje su X_i nezavisne jedinične normalne razdiobe (a taj se izraz vrlo često pojavljuje u statistici).

F-razdioba.

I ta razdioba ima važnu primjenu u testiranju.

Fischerova razdioba F(r,s) sa (r,s) stupnjeva slobode (sl.5.) definira se kao:

$$F(r,s) := \frac{s\chi^2(r)}{r\chi^2(s)}$$

Tu oznaku F ne treba brkati sa standardnom oznakom za funkciju distribucije.

3. Izvodi nekih teoretskih distribucija

Binomnu razdiobu već smo izveli. Drugim riječima, izveli smo da ako teoretska razdioba *X* registrira koliko se puta dogodio događaj A pri n nezavisnih izvođenja nekog pokusa, onda je X~B(n,p), gdje je *p* vjerojatnost da se *A* dogodi u svakom pojedinačnom pokusu. Slično ćemo provesti za Poissonovu, eksponencijalnu i normalnu razdiobu. Postupak će u svim slučajevima biti analogan: najprije ćemo opisati pokus i slučajnu varijablu, potom ćemo, uz prihvaćanje nekih razumnih predpostavaka, dokazati da ta slučajna varijabla ima određenu teoretsku razdiobu.

Poissonova razdioba.

Neka slučajna varijabla X opisuje broj poruka na nekoj adresi u fiksiranom vremenskom intervalu. Već smo rekli da pokusi pokazuju da se ta slučajna varijabla ponaša prema Poissonovu zakonu (isto vrijedi za slične slučajne varijable). To ćemo izvesti uz neke predpostavke. Recimo da želimo odrediti p(X=i), za neki i.

1. predpostavka. Poruka ravnopravno može doći u svakom trenutku u tom intervalu.

Zamislimo da smo zadani interval podijelili na veliki broj n (u usporedbi s i) vrlo malih intervala, za koji zahtijevamo sljedeću prirodnu pretpostavku:

2. predpostavka. U svakom od tih malih intervala mogu nastupiti samo dvije mogućnosti – ili je poruka došla ili nije.

Neka je a prosječan broj poruka u zadanom vremenskom intervalu. Tada možemo smatrati da slučajna varijabla registrira koliko se puta pojavila poruka u n nezavisnih izvodjenja pokusa pri kojemu poruka dolazio s vjerojatnošću a/n (jer ima *n* ravnopravnih intervala intervala i prosječno *a* poruka). Zato je približno
X~B(n,a/n)
pa je, opet

$$p(X=i) \approx \binom{n}{i}\left(\frac{a}{n}\right)^i\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-i} =$$

$$\frac{a^i}{i!}1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{i-1}{n})\frac{(1-\frac{a}{n})^n}{(1-\frac{a}{n})^i} \approx$$

$$\frac{a^i}{i!}e^{-a}$$

To je zato što za velike *n*, u usporedbi s *i*, vrijedi
$(1-\frac{a}{n})^n \approx e^{-a}$, $(1-\frac{a}{n})^i \approx 1$, $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{i-1}{n}) \approx 1$.

Eksponencijalna razdioba.

Predpostavimo da slučajna varijabla X mjeri vrijeme rada neke žarulje do kvara (ili nešto analogno, poput vremena izmedju dviju poruka na nekoj adresi i sl.). Treba obrazložiti zašto je ta slučajna varijabla eksponencijalno distribuirana. Zamislimo da imamo veliki broj žarulja koje su počele gorjeti u trenutku t=0, i neka je y(t) broj žarulja u trenutku *t* koje i dalje gore. Intuitivno je jasno, može se provjeriti pokusom, da postoji pozitivna konstanta *k* (koja ovisi o kvaliteti proizvedenih žarulja), tako da bude:
$y(t+\Delta t)-y(t) \approx -ky(t)\,\Delta t$
(to znači da je broj stradalih žarulja u nekom relativno malom vremenskom intervalu, proporcionalan duljini tog intervala i količini žarulja na početku tog intervala – predznak minus je zato što je lijeva strana negativna). Prelaskom na kontinuirane funkcije, naslućujemo da je pripadna diferencijalna jednadžba
$dy(t) = -ky(t)dt$
koju rješavamo separacijom varijabla
$dy(t)/y(t) = -kdt$
i lako dobijemo
$y(t)=y(0)e^{-kt}$
gdje je y(0) količina žarulja na početku (uočite analogiju s opisom radioaktivnog raspada)..
Sad dobijemo za funkciju distribucije *F* od *X*:
$F(t)=p(X<t)$= vjerojatnost da slučajno odabrana žarulja strada do vremena t =
$1-p(X>t)=1-\frac{y(t)}{y(0)}=1-e^{-kt}$, za t>0.
(to je zato jer je y(t) količina žarulja koje su preživjele vrijeme *t*).
Sad za funkciju gustoće slučajne varijable *X*, dobijemo
$f(t)=F'(t)=ke^{-kt}$, za t>0,
što smo i trebali pokazati.

Normalna razdioba.

Neka slučajna varijabla *X* registrira grješku pri mjerenju. Već smo obrazložili zašto bi njena funkcija gustoće *f* trebala biti parna funkcija, padajuća za pozitivne *x*, a rastuća za negativne. Sad ćemo pokazati kako se, uz još neke prirodne pretpostavke, može doći do

tražene formule. Metoda je mala modifikacija metoda koje su još sredinom 19. st. predložili astronom John Herschel, i matematičar, fizičar i kemičar James Maxwell.
Zamislimo da smo izvršili dvije velike serije mjerenja. Statistički bismo približno mogli odrediti vjerojatnost da grješka u prvoj seriji mjerenja padne u interval $[x,x+\Delta x]$, a jednako tako da grješka u drugoj seriji mjerenja upadne u interval $[y,y+\Delta y]$.

1. predpostavka. Razumno je predpostaviti da se grješke u tim dvjema serijama mjerenja pojavljuju nezavisno, tj., ako te grješke označimo kao e_1, e_2 onda je:

$p(e_1$ je u $[x,x+\Delta x]$ i e_2 je u $[y,y+\Delta y])=$
$p(e_1$ je u $[x,x+\Delta x]$) $p(e_2$ je u $[y,y+\Delta y])\approx$
$f(x)\Delta x\cdot f(y)\Delta y$
$f(x)f(y)\Delta x\Delta y$.

S druge strane, ako je □ mali pravokutnik sa stranicama Δx, Δy, onda se možemo pitati kolika je vjerojatnost da uređeni par grješaka (e_1, e_2) upadne u takav pravokutnik postavljen tako da mu jedan vrh bude u točki (x,y) kao na slici. Uočimo dvije takve točke (x,y) i (x',y') obje na udaljenosti r od ishodišta, samo na različitim smjerovima. Uočimo i pravokutnik □ smješten u tim točkama. Nema nikakvog razloga da neki od tih smjerova bude povlašten, tj. da se u njegovu pravokutniku češće pojavljuje uređeni par grješaka nego u nekom drugom. Zato je razumno (iako ne očito) prihvatiti sljedeću predpostavku.

2. predpostavka. Vjerojatnost pojavljivanja uređenog para grješke ne ovisi o smjeru, već samo o udaljenosti od ishodišta, tj.

$f(x)f(y)=g(\sqrt{(x^2+y^2)})$, za neku funkciju g.
Ako stavimo $y=0$, dobit ćemo $g(x)=f(x)f(0)$ (najprije za pozitivne x, potom i za sve jer g treba biti parna funkcija, kao i f). Zato je:
$f(x)f(y)=f(\sqrt{(x^2+y^2)})f(0)$, za sve x,y, pa možemo staviti y=x i dobiti
$f(x)^2=f(0)f(x\sqrt{2})$, za sve x. To logaritmiramo i dobijemo
$2\ln f(x)=\ln f(0)+\ln f(x\sqrt{2})$.
Stavimo sad $h(x):=\ln f(x)$ pa ćemo dobiti:
$2h(x)=h(0)+h(x\sqrt{2})$.
Razvijmo sad funkciju h oko ishodišta:
$h(x)=a+bx+cx^2+dx^3+rx^4+...$
uvrstimo u gornju relaciju i izjednačimo koeficijente. Dobit ćemo:
$2a=h(0)+a$, $2b=b\sqrt{2}$, $2c=2c$, $2d=2d\sqrt{2}$, $2r=4r$ itd.
Vidimo da mora biti: $a=h(0)$ i $b=d=e=...=0$, pa ostaje
$h(x)=h(0)+cx^2 = \ln f(0)+cx^2$, za neki realan broj c. Zato je
$f(x)=e^{h(x)}= f(0)\,e^{cx^2}$.
Sad iskoristimo sljedeće dvije činjenice:

(i) Mora biti $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(ii) Vrijedi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 1$,

Iz kojih odmah dobijemo da je $c=-\frac{1}{2\sigma}$ za neki $\sigma > 0$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$.